3.3 Quelques résultats sur les permutations aléatoires suivant la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$ (105, 190, 262, 264) [17], [19], [30]

Définition 3.13 (Factorielles croissante et décroissante)**.** Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la *n-ième factorielle décroissante* et la *n-ième factorielle croissante* de x, notées respectivement $x^{\underline{n}}$ et $x^{\overline{n}}$ par les formules de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} &= 1, \\ x^{\underline{n+1}} &= (x-n)x^{\underline{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ x^{\overline{n+1}} &= (x+n)x^{\overline{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On peut alors définir les *nombres de Stirling de premère espèce :*

Définition 3.14 (Nombres de Stirling de première espèce)**.** Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in [\![0, n]\!]$. Le nombre $x^{\underline{n}}$ est un polynôme en x et on note $s(n, k)$ les nombres entiers tels que :

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) x^k.$$

Théorème 3.15 (Loi et espérance du nombre de cycles à supports disjoints d'une permutation tirée uniformément dans $\mathfrak{S}_n$)**.** Soit Σ_n une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{U}(\mathfrak{S}_n)$, et notons C_n la variable aléatoire comptant le nombre de cycles à supports disjoints apparaissant dans la décomposition de Σ_n. Alors, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_{C_n}(t) = \frac{t^{\overline{n}}}{n!},$$

plus précisément :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}(C_n = k) = \frac{|s(n,k)|}{n!}$$

et :

$$\mathbb{E}(C_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

De plus (à mettre pour la leçon 262) on a le théorème limite central suivant :

$$\frac{C_n - \ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0, 1).$$

Démonstration. **Étape 1 : $\sum_{k=0}^{n} |s(n,k)| x^k = x^{\overline{n}}$:**

En développant l'écriture de $x^{\underline{n}}$ et $x^{\overline{n}}$, on obtient :

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)\dots(x-n+1), \quad x^{\overline{n}} = x(x+1)\dots(x+n-1).$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (-x)^{\underline{n}} = (-1)^n x^{\overline{n}}.$$

Ainsi, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s(n,k) x^k.$$

Or, en notant $\tilde{s}(n,k)$ les entiers tels que :

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \tilde{s}(n,k)x^k$$

on a :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \tilde{s}(n,k) \geqslant 0$$

par somme et produits d'entiers positifs. On a donc :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad (-1)^{n-k}s(n,k) \geqslant 0$$

et donc :

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} |s(n,k)|x^k.$$

Étape 2 : Une relation de récurrence sur les $|s(n,k)|$:
On va utiliser la relation de récurrence sur la factorielle croissante afin de déduire une relation de récurrence sur les $|s(n,k)|$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} |s(n+1,k)|x^k = x^{\overline{n+1}} = (x+n)\sum_{k=0}^{n} |s(n,k)|x^k = \sum_{k=1}^{n} \left(|s(n,k-1)| + n|s(n,k)|\right) x^k + |s(n,n)|x^{n+1}.$$

On en déduit donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} |s(n,0)| & = & 0 \\ |s(n,n)| & = & 1 \\ |s(n+1,k)| & = & |s(n,k-1)| + n|s(n,k)|, \quad \forall k \in [\![1,n]\!]. \end{array} \right.$$

Étape 3 : Le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ s'écrivant comme produit de k cycles à supports disjoints vérifie la même relation de récurrence :
Disclaimer : Attention ! Ici, l'identité sera considérée comme étant un produit de n cycles à supports disjoints ! (on considère les 1-cycles comme étant des cycles à part entière).

Notons $\mathfrak{S}_{n,k}$ l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ s'écrivant comme produits de k cycles à supports disjoints et $C(n,k)$ son cardinal. On a :

$$C(n,0) = 0, \text{ et } C(n,n) = 1$$

car si $n \geqslant 1$, une permutation possède au moins 1 cycle dans sa décomposition et $id_{[\![1,n]\!]}$ est la seule permutation de $\mathfrak{S}_n$ s'écrivant comme produit de n cycles à supports disjoints. Pour passer du cran n au cran $n+1$, il faut distinguer les cas selon la présence de $n+1$ dans un cycle de longueur plus grande que 1 ou non. On écrit alors $\mathfrak{S}_{n+1,k}$ grâce à la partition suivante :

$$\mathfrak{S}_{n+1,k} = \bigsqcup_{m=1}^{n+1} \mathfrak{S}_{n+1,k}(m)$$

où on a noté :

$$\mathfrak{S}_{n+1,k}(m) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_{n,k} \ \mid \sigma(n+1) = m\}$$

Cas $m = n+1$: Si $\sigma(n+1) = n+1$, alors l'application de restriction à $[\![1,n]\!]$ devient une bijection entre $\mathfrak{S}_{n+1,k}(n+1)$ et $\mathfrak{S}_{n,k-1}$. En effet, si $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1,k}(n+1)$, alors sa restriction à $[\![1,n]\!]$ est une permutation et s'écrit nécessairement comme un produit de $k-1$ cycles à supports disjoints (puisque σ possède déjà le cycle $(n+1)$). Réciproquement, une permutation de $[\![1,n]\!]$ s'écrivant comme un produit de $k-1$ cycles à supports disjoints se voit naturellement comme un élément de $\mathfrak{S}_{n+1}$ s'écrivant comme produit de k cycles à supports disjoints. D'où :

$$|\mathfrak{S}_{n+1,k}(n+1)| = C(n,k-1).$$

Cas $m \leqslant n$: Si $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1,k}(m)$, alors, il s'écrit :

$$\sigma = c \circ c_2 \circ \ldots \circ c_k$$

où $c = \begin{pmatrix} n+1 & m & i_3 & \ldots & i_r \end{pmatrix}$ désigne le cycle de σ dans sa décomposition contenant $n+1$. On a alors, en notant :

$$\sigma' = \begin{pmatrix} n+1 & m \end{pmatrix} \circ \sigma,$$

que $\sigma' \in \mathfrak{S}_{n+1,k}(n+1)$. Ainsi, $\sigma'_{|[\![1,n]\!]} \in \mathfrak{S}_n$. Notons cette restriction $f(\sigma)$. On a alors défini une application :

$$f \quad : \quad \mathfrak{S}_{n+1,k}(m) \quad \longrightarrow \quad \mathfrak{S}_n$$

Montrons qu'en réalité, $f(\sigma) \in \mathfrak{S}_{n,k}$ et que f est injective. Premièrement, on observe que le cycle c de σ est transformé en le cycle $c' = \begin{pmatrix} m & i_3 & \ldots & i_r \end{pmatrix}$ dans la décomposition de σ'. Plus concrètement, on a :

$$\sigma' = c' \circ c_2 \circ \ldots c_k$$

et, étant donné que tous les entiers apparaissant dans le support de σ' sont entre 1 et n, $f(\sigma)$ s'écrit exactement :

$$f(\sigma) = c' \circ c_2 \circ \ldots c_k.$$

Ainsi, $f(\sigma)$ possède exactement k cycles dans sa décomposition. Donc :

$$f(\sigma) \in \mathfrak{S}_{n,k}.$$

Enfin, f est injective. En effet, si $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_{n+1,k}(m)$ sont tels que $f(\sigma) = f(\tau)$, alors en écrivant :

$$\sigma = \begin{pmatrix} n+1 & m & i_3 & \ldots & i_r \end{pmatrix} \circ c_2 \circ \ldots \circ c_k$$

et :

$$\tau = \begin{pmatrix} n+1 & m & j_3 & \ldots & j_s \end{pmatrix} \circ \tilde{c}_2 \circ \ldots \circ \tilde{c}_k$$

on a, d'après le calcul précédent :

$$f(\sigma) = \begin{pmatrix} m & i_3 & \ldots & i_r \end{pmatrix} \circ c_2 \circ \ldots \circ c_k$$

et :

$$f(\tau) = \begin{pmatrix} m & j_3 & \ldots & j_s \end{pmatrix} \circ \tilde{c}_2 \circ \ldots \circ \tilde{c}_k.$$

Ainsi, $c_i = \tilde{c}_i$ pour tout $i \in [\![2,k]\!]$, $s = r$ et $j_l = i_l$ pour tout $l \in [\![3,r]\!]$, donc $\sigma = \tau$. On a donc montré que f effectuait une bijection entre $\mathfrak{S}_{n+1,k}(m)$ et $\mathfrak{S}_{n,k}$ pour tout $m \in [\![1,n]\!]$. On a donc :

$$C(n+1,k) = |\mathfrak{S}_{n+1,k}| = \sum_{m=1}^{n+1} |\mathfrak{S}_{n+1,k}(m)| = C(n,k-1) + \sum_{m=1}^{n} C(n,k) = C(n,k-1) + nC(n,k).$$

On montre alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $C(n,k) = |s(n,k)|$.

Étape 4 : Conclusion

Si Σ est une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{U}(\mathfrak{S}_n)$, et si C_n désigne son nombre de cycles à supports disjoints apparaissant dans sa décomposition, on a :

$$\mathbb{P}(C_n = k) = \frac{C(n,k)}{n!} = \frac{|s(n,k)|}{n!}.$$

On peut alors en déduire sa série génératrice :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_{C_n}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(C_n = k) t^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{|s(n,k)|}{n!} t^k = \frac{t^{\overline{n}}}{n!}.$$

On en déduit donc :

$$\mathbb{E}(C_n) = G'_{C_n}(1) = \underbrace{G_{C_n}(t)}_{=1} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\ln\left(t^{\overline{n}}\right)\right)_{|t=1}$$

Or, pour tout $t > 0$, on a :

$$\ln\left(t^{\overline{n}}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \ln(t+i).$$

D'où :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln\left(t^{\overline{n}}\right)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{t+i}.$$

On conclut donc que :

$$\mathbb{E}(C_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1}$$

ce qui termine la preuve !

Étape 5 : Le théorème limite central pour les cycles (en bonus pour la leçon 262)

On a pu déterminer la fonction génératrice de notre nombre de cycles C_n. On peut donc en déduire sa fonction caractéristique ! En effet :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{C_n}(t) = G_{C_n}\left(e^{it}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{e^{it} + k - 1}{k}\right).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$G_{\frac{C_n - \ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}}}(t) = e^{-it\sqrt{\ln(n)}} G_{C_n}\left(\frac{t}{\sqrt{\ln(n)}}\right) = e^{-it\sqrt{\ln(n)}} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\exp\left(\frac{it}{\sqrt{\ln(n)}}\right) - 1}{k}\right).$$

Or, $\exp\left(\frac{it}{\sqrt{\ln(n)}}\right) - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{it}{\sqrt{\ln(n)}}$. Ainsi, il exsite un rang à partir duquel $\exp\left(\frac{it}{\sqrt{\ln(n)}}\right) - 1$ soit de module strictement inférieur à $\frac{1}{2}$, de sorte qu'on puisse appliquer la branche principale du logarithme :

$$G_{\frac{C_n - \ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}}}(t) = \exp\left(-it\sqrt{\ln(n)} + \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{\exp\left(\frac{it}{\sqrt{\ln(n)}}\right) - 1}{k}\right)\right).$$

Or, il existe une fonction h holomorphe sur le disque $\mathbb{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ telle que $h(z) \xrightarrow[z \to 0]{} \frac{1}{2}$ et :

$$\forall z \in \mathbb{D}\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \log(1+z) = z + z^2 h(z).$$

Ainsi, on obtient l'expression suivante pour $G_{\frac{C_n-\ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}}}(t)$:

$$\exp\left(-it\sqrt{\ln(n)}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\exp\left(\frac{it}{\sqrt{\ln(n)}}\right)-1}{k}+\frac{\left(\exp\left(\frac{it}{\sqrt{\ln(n)}}\right)-1\right)^2}{k^2}h\left(\frac{\exp\left(\frac{it}{\sqrt{\ln(n)}}\right)-1}{k}\right)\right)\right).$$

On a alors le développement limité suivant :

$$\begin{aligned}
G_{\frac{C_n-\ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}}}(t) &= \exp\left(-it\sqrt{\ln(n)}+\underbrace{(\ln(n)+O(1))}_{\substack{\text{DL de la série}\\ \text{harmonique}}}\left(\frac{it}{\sqrt{\ln(n)}}-\frac{t^2}{2\ln(n)}+o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)\right)+o(1)\right)\\
&= \exp\left(-it\sqrt{\ln(n)}+it\sqrt{\ln(n)}-\frac{t^2}{2}+o(1)\right)\\
&= \exp\left(-\frac{t^2}{2}+o(1)\right).
\end{aligned}$$

□

Ce développement serait un petit peu court si on s'arrêtait là non ? Alors vous reprendrez bien un petit résutat pour la route !

Définition 3.16 (Nombres de Stirling de deuxième espèce)**.** Pour $n\in\mathbb{N}$ et $k\in[\![0,n]\!]$, on définit les *nombres de Stirling de deuxième espèce*, notés $S(n,k)$ comme les entiers vérifiant :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad x^n=\sum_{k=0}^{n}S(n,k)x^{\underline{k}}.$$

Proposition 3.17. $S(n,k)$ est le nombre de façons de partitionner $[\![1,n]\!]$ en exactement k sous-ensembles. En particulier, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n}S(n,k)=B_n$$

où B_n désigne le n-ième nombre de Bell, comptant le nombre de façons de partitionner $[\![1,n]\!]$.

Démonstration. Déjà, les nombres $S(n,k)$ sont bien définis car la famille $(1,X,\ldots,X(X-1)\ldots(X-n+1))$ est échelonnée en degré et possède $n+1$ éléments. Ainsi, elle forme une base de $\mathbb{Q}_n[X]$. Ensuite, on vérifie les faits suivants :

$$S(0,0)\ =\ 1\quad\text{et}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad\left\{\begin{array}{rcl}S(n,0)&=&0\\ S(n,n)&=&1\\ S(n+1,k)&=&S(n,k-1)+kS(n,k),\quad\forall k\in[\![1,n]\!].\end{array}\right.$$

En effet, $S(0,0)$ est bien égal à 1 car $x^{\underline{0}}=1$ et pour $n\geqslant 1$, en identifiant les coefficients devant x^0 et x^n des deux côtés de l'égalité, on obtient :

$$S(n,0)=0\quad\text{et}\quad S(n,n)=1.$$

Enfin, en calculant x^{n+1} de deux façons différentes, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n+1} S(n+1,k)x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)xx^{\underline{k}}.$$

Or, on a :

$$xx^{\underline{k}} = (x-k)x^{\underline{k}} + kx^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}.$$

Ainsi, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n+1} S(n+1,k)x^{\underline{k}} = \sum_{k=1}^{n+1} S(n,k-1)x^{\underline{k}} + \sum_{k=0}^{n} kS(n,k)x^{\underline{k}}.$$

Ainsi, en identifiant les coefficients devant $x^{\underline{k}}$ pour $k \in [\![1,n]\!]$, on obtient :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad S(n+1,k) = S(n,k-1) + kS(n,k).$$

Enfin, vérifions que le nombre $P(n,k)$ de façons de partitionner $[\![1,n]\!]$ en k sous-ensembles non-vides vérifie la même relation de récurrence que $S(n,k)$ et les mêmes conditions initiales. Notons $\mathscr{P}_{n,k}$ l'ensemble des partitions de $[\![1,n]\!]$ en exactement k sous-ensembles non-vides. Pour $P \in \mathscr{P}_{n+1,k}$, on numérote les éléments $p_1,\ldots,p_k$ de P de sorte que :

$$\min p_1 < \ldots < \min p_k,$$

et on définit $m(P)$ l'entier tel que $n+1 \in p_{m(P)}$. On va donc partitionner $\mathscr{P}_{n+1,k}$ selon si $n+1$ est le seul élément de $p_{m(P)}$ ou pas. Définissons donc $p'(P) = p_{m(P)} \setminus \{n+1\}$ de sorte qu'on ait la partition :

$$\mathscr{P}_{n+1,k} = \mathscr{P}^*_{n+1,k} \sqcup \left(\bigsqcup_{m=1}^{k} \mathscr{P}_{n+1,k}(m) \right)$$

avec :

$$\mathscr{P}^*_{n+1,k} = \{P \in \mathscr{P}_{n+1,k} \mid p'(P) = \emptyset\}$$

et :

$$\mathscr{P}_{n+1,k}(m) = \{P \in \mathscr{P}_{n+1,k} \mid m(P) = m, p'(P) \neq \emptyset\}.$$

Les applications :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{P}^*_{n+1,k} & \longrightarrow & \mathscr{P}_{n,k-1} \\ P & \longmapsto & \{p_i \mid i \in [\![1,k]\!] \setminus \{m(P)\}\} \end{array}$$

et :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{P}_{n+1,k}(m) & \longrightarrow & \mathscr{P}_{n,k} \\ P & \longmapsto & \{p_i \mid i \in [\![1,k]\!] \setminus \{m(P)\}\} \cup \{p'(P)\} \end{array}$$

sont alors des bijections. On a donc :

$$P(n+1,k) = P(n,k-1) + kP(n,k),$$

et il est clair que $P(n,0) = 0$ et $P(n,n) = 1$, ce qui conclut. $\square$

Théorème 3.18 (Moments du nombre de points fixes d'une permuatition tirée uniformément dans $\mathfrak{S}_n$)**.** Si Σ est une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{U}(\mathfrak{S}_n)$, alors, en notant F la variable aléatoire comptant le nombre de points fixes de Σ, alors on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}\left(F^k\right) = \sum_{i=0}^{n} S(k,i).$$

(avec, pour tout $k > n$, $S(n,k) = 0$). En particulier, on a :

$$\forall k \leqslant n, \quad \mathbb{E}\left(F^k\right) = B_k$$

et donc, F a les mêmes n premiers moments que la loi de Poisson $\mathscr{P}(1)$. En

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a, par définition de F :

$$\mathbb{E}\left(F^k\right) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |\mathrm{Fix}(\sigma)|^k$$

où $\mathrm{Fix}(\sigma)$ désigne l'ensemble des points fixes d'une permutation σ. Si $k = 0$, on a $\mathbb{E}\left(F^k\right) = 1$ et $B_0 = 1$ par convention. Si $k = 1$, on reconnaît un des deux membres de l'égalité dans la formule de Burnside lorsqu'un groupe G agit sur un ensemble X :

$$\left|\frac{X}{G}\right| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

Ici, $G = \mathfrak{S}_n$ et $X = [\![1,n]\!]$. L'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $[\![1,n]\!]$ étant transitive, le nombre d'orbites est 1. Ainsi :

$$\mathbb{E}(F) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |\mathrm{Fix}(\sigma)| = 1.$$

On a également $B_1 = 1$. La clef de ce résultat est donc la formule de Burnside. On va donc considérer l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $[\![1,n]\!]^k$:

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \forall (i_1,\ldots,i_k) \in [\![1,n]\!]^k, \quad \sigma \cdot (i_1,\ldots,i_k) = (\sigma(i_1),\ldots,\sigma(i_k)).$$

On l'appelle *action diagonale*. Si $\mathrm{Fix}^k(\sigma)$ désigne l'ensemble des points fixes de la permutation σ pour cette action, alors, on a :

$$\mathrm{Fix}^k(\sigma) = \mathrm{Fix}(\sigma)^k.$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}\left(F^k\right) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \left|\mathrm{Fix}^k(\sigma)\right| = \left|\frac{[\![1,n]\!]^k}{\mathfrak{S}_n}\right|.$$

En notant $\mathscr{P}_{k,j}$ l'ensemble des partitions de $[\![1,k]\!]$ en exactement j sous-ensembles non-vides, considérons l'application :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \dfrac{[\![1,n]\!]^k}{\mathfrak{S}_n} & \longrightarrow & \displaystyle\bigsqcup_{j=1}^{n} \mathscr{P}_{k,j} \\ & & \mathfrak{S}_n \cdot (i_1,\ldots,i_k) & \longmapsto & P_{(i_1,\ldots,i_k)} \end{array}$$

où $P_{(i_1,\ldots,i_k)}$ désigne la partition de $[\![1,k]\!]$ donnée par la relation d'équivalence $\mathscr{R}_{(i_1,\ldots,i_k)}$:

$$\forall m,l \in [\![1,k]\!], \quad m \mathscr{R}_{(i_1,\ldots,i_k)} l \iff i_m = i_l.$$

c'est-à-dire que $P_{(i_1,\ldots,i_k)}$ est la partition $\{I_1,\ldots,I_r\}$ de $[\![1,k]\!]$ regroupant les indices de sorte que les valeurs de la liste en ces indices soient identiques. Plus concrètement :

$$\forall s \in [\![1,r]\!],\ \forall m,l \in I_s, \quad i_l = i_m,$$
$$\forall s,t \in [\![1,r]\!], s \neq t,\ \forall (l,m) \in I_s \times I_t \quad i_l \neq i_m.$$

Par exemple, si $k=7$ et $n=5$, alors $P_{(1,3,2,3,1,5,1)} = \{\{1,5,7\},\{2,4\},\{3\},\{6\}\} \in \mathscr{P}_{7,4}$.
f est bien définie à la source car si $(i_1,\dots,i_k) \in [\![1,n]\!]^k$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors $\mathscr{R}_{(i_1,\dots,i_k)} = \mathscr{R}_{(\sigma(i_1),\dots,\sigma(i_k))}$ et f est bien définie au but car, si $k \leqslant n$, alors il y a forcément moins de n éléments dans une partition $P_{(i_1,\dots,i_k)}$ et si $k > n$, alors dans toute liste $(i_1,\dots,i_k) \in [\![1,n]\!]^k$, il y a au plus n éléments distincts, et donc au plus n éléments dans la partition $P_{(i_1,\dots,i_k)}$. De plus, f est bijective par définition de la relation $\mathscr{R}_{(i_1,\dots,i_k)}$ et par le fait que $\mathfrak{S}_n$ agit transitivement sur $[\![1,n]\!]$. En effet, on a la caractérisation suivante de $\mathfrak{S}_n \cdot (i_1,\dots,i_k)$:

$$\mathfrak{S}_n \cdot (i_1,\dots,i_k) := \{(\sigma(i_1),\dots,\sigma(i_k)) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\} = \left\{(m_1,\dots,m_k) \in [\![1,n]\!]^k \;\middle|\; P_{(m_1,\dots,m_k)} = P_{(i_1,\dots,i_k)}\right\}.$$

Si on reprend l'exemple précédent,

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_5 \cdot (1,3,2,3,1,5,1) &= \{(\sigma(1),\sigma(3),\sigma(2),\sigma(3),\sigma(1),\sigma(5),\sigma(1)) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_5\} \\ &= \{(a,b,c,b,a,d,a) \mid a,b,c,d \in [\![1,5]\!] \text{ distincts 2 à 2}\}, \end{aligned}$$

et on a bien que $P_{(a,b,c,b,a,d,a)} = P_{(1,2,3,2,1,5,1)}$.
Ainsi, on a :

$$\left|\frac{[\![1,n]\!]^k}{\mathfrak{S}_n}\right| = \sum_{j=1}^{n} |\mathscr{P}_{k,j}| = \sum_{j=1}^{n} S(k,j).$$

Vérifions pour finir que les moments de la loi de Poisson $\mathscr{P}(1)$ sont égaux aux nombres de Bell.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad e^{-1}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i^k}{i!} = e^{-1}\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{k} S(k,j)\, i^{\underline{j}}\frac{1}{i!}.$$

Or, pour $i \leqslant j$, $i^{\underline{j}} = 0$. Donc :

$$e^{-1}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i^k}{i!} = e^{-1}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=j}^{+\infty} S(k,j)\frac{i^{\underline{j}}}{i!} = e^{-1}\sum_{j=0}^{k} S(k,j)\sum_{i=j}^{+\infty}\frac{1}{(i-j)!} = \sum_{j=0}^{k} S(k,j) = B_k.$$

Cela termine la preuve ! $\square$